Matrici hermitiane e definite positive

Sandro Tosi

31 gennaio 2004

Una matrice, A, in $\mathbb{R}^{n\times n}$ si dice *simmetrica e definita positiva* se rispetta le condizioni:

1. $A = A^t$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \underline{0} \quad x^t A x > 0$

In alcuni campi, soprattutto inerenti la fisica, risulta utile poter verificare proprietà analoghe per matrici complesse.

La prima di esse è di facile individuazione in quanto la proprietà analoga alla simmetria per matrici complesse è l'*hermitianità*: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è *hermitiana* sse $A^t = \overline{A}$.

Se, invece, cerchiamo di applicare banalmente una veloce trasposizione della seconda proprietà come $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq \underline{0} \quad x^t A x > 0$ con $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ non otterremmo niente di utile: infatti, la più semplice delle matrici hermitiane è composta dal solo numero reale 1, quindi

$$z^t[1]z = z[1]z = z^2 \notin \mathbb{R} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

e non ha senso definire un predicato di maggioranza su questa quantità, che è un numero complesso, e dunque non è possibile verificare se $z^t A z > 0$.

Per trovare una proprietà analoga alla *definita positività* vista per matrici simmetriche nel caso di matrici hermitiane, si sfrutta il seguente

Lemma. *$x^t A\overline{x} \in \mathbb{R}$ sse A è una matrice hermitiana.*

Dimostrazione. Se A è hermitiana, la relazione $A^t = \overline{A}$ è valida. Verifichiamo il lemma nel caso semplice in cui $A \in \mathbb{C}^{1\times 1}$: per ogni numero $y \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}$ sse $y = \overline{y}$; allora

$$\overline{(x^t A\overline{x})} \;=\; \overline{x}^t\overline{A}x \;=^1\; \overline{x}^t A^t x \;=\; (x^t A\overline{x})^t$$

ciò che si cercava.

[1]passaggio valido in quanto A è una matrice hermitiana 1×1

Proviamo ora ad estendere quanto visto ad una matrice hermitiana qualsiasi: sia dunque $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e sia $x \in \mathbb{C}^n$, cerchiamo di mostrare che

$$\overline{(x^t A \overline{x})} = x^t A \overline{x}$$

proprietà verificata solo dai numeri reali; infatti

$$\overline{(x^t A \overline{x})} = \overline{x}^t \overline{A} x$$

se supponiamo che sia un numero, e cioè una matrice 1×1, allora sarà equivalente al suo trasposto, cioè

$$\overline{x}^t \overline{A} x = \left(\overline{x}^t \overline{A} x\right)^t = x^t \overline{A}^t \overline{x}$$

che risulta essere equivalente a $x^t A \overline{x}$ sse $A^t = \overline{A}$, cioè se A è hemitiana, la nostra condizione iniziale $\square$

Riassumedo, le condizioni che una matrice deve rispettare perchè sia *hermitiana e definita positiva* sono:

1. $A^t = \overline{A}$
2. $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq \underline{0} \quad x^t A \overline{x} > 0$